Curso de Tecnologia em Sistemas de Computação
Disciplina: Estrutura de Dados e Algoritmos
Gabarito da AP2 - Primeiro Semestre de 2017

Nome -
Assinatura -

Observações:

1. Prova sem consulta e sem uso de máquina de calcular.
2. Use caneta para preencher o seu nome e assinar nas folhas de questões e nas folhas de respostas.
3. Você pode usar lápis para responder as questões.
4. Ao final da prova devolva as folhas de questões e as de respostas.
5. Todas as respostas devem ser transcritas nas folhas de respostas. As respostas nas folhas de questões não serão corrigidas.

---

1. Considere uma fila de prioridade (heap) T contendo $n > 0$ nós, onde para cada nó interno x, a prioridade de x é maior do que a prioridade de qualquer um de seus filhos. Considere o seguinte algoritmo:

   repita

   remova a raiz de T e imprima sua prioridade

   até que $T = \emptyset$

   (a) (1,0) Analisando a lista de valores impressos, o que o algoritmo acima realizou?

   Resposta: Como o primeiro elemento de um heap é o maior elemento do mesmo, a cada remoção obtemos um novo heap onde o elemento inicial é o maior da lista resultante. Dessa forma imprimimos o elementos de T em ordem não crescente de prioridade.

   (b) (1,0) Qual é a complexidade deste algoritmo?

   Resposta: A complexidade é dada pelas operações de remoção do elemento inicial da lista a cada passo. Como a remoção do primeiro elemento custa $O(\log n)$ e fazemos esta operação n vezes, a complexidade de pior caso deste algoritmo é $O(n \log n)$.

2. (2,0) Esta questão versa sobre árvores B.

   (a) Desenhe uma árvore B de ordem 2 e altura 3 que contenha o menor número possível de chaves, digamos k. As chaves devem ser os números $1, 2, 3, \ldots, k$.

   Resposta: A Figura 1 mostra um exemplo de árvore B de ordem 2 e altura 3 que contém o menor número possível de chaves.

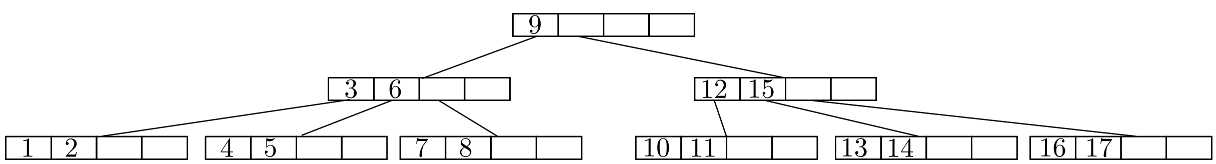


Figura 1: Árvore B inicial.

   (b) Desenhe uma árvore B de ordem 2 e altura 2 que contenha o maior número possível de chaves, digamos n. As chaves devem ser $1, 2, 3, \ldots, n$.

   Resposta: A Figura 2 mostra um exemplo de árvore B de ordem 2 e altura 2 que contém o maior número possível de chaves.

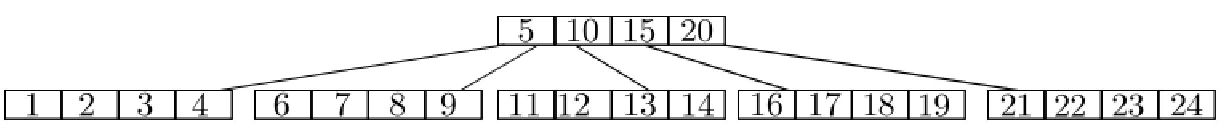
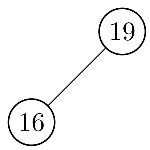


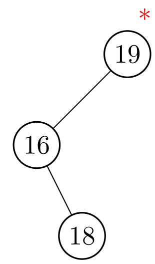
Figura 2: Árvore B inicial.

3. (2,0) Construa a árvore AVL formada pela inserção das chaves
   $19, 16, 18, 15, 17, 6, 2$ (nesta ordem). Mostre quais operações de rotação foram utilizadas durante a construção.

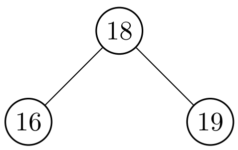
(a) Inclusão do elemento 19.



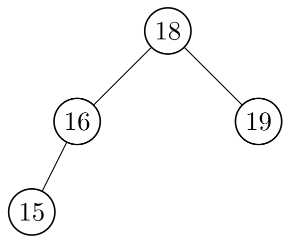
(b) Inclusão do elemento 16.



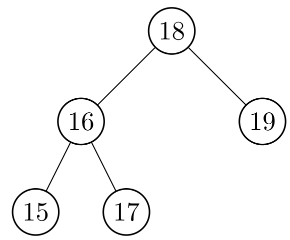
(c) Inclusão do elemento 18.



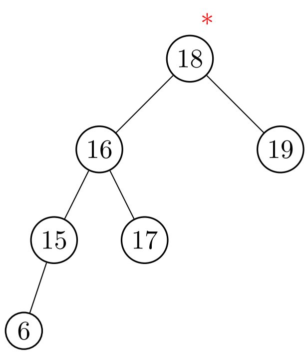
(d) Rotação dupla direita.



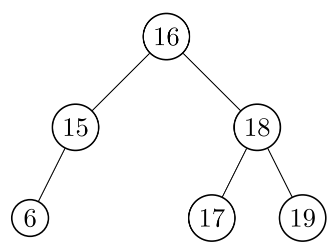
(e) Inclusão do elemento 15.



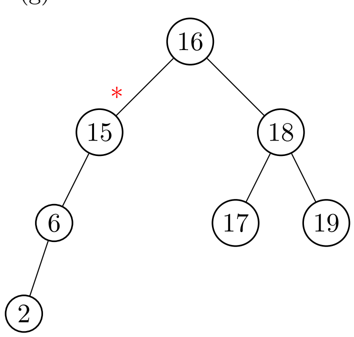
(f) Inclusão do elemento 17.



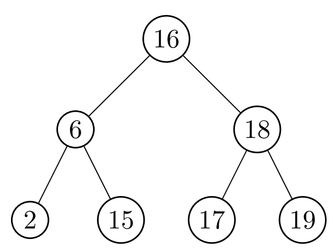
(g) Inclusão do elemento 6.



(h) Rotação a direita.



(i) Adição do elemento 2.



(j) Rotação a direita.

Figura 3: Sequência de inclusões para construção de uma árvore AVL.

Resposta: A Figura 3 representa a sequência de inclusões e rotações necessárias para que a árvore obtida a cada etapa continue balanceada. O símbolo ($*$) é usado sobre um nó para indicar que o mesmo tornou-se desbalanceado.

4. É dada uma tabela de espalhamento T com 5 posições, numeradas de 0 a 4. Deseja-se armazenar em T as seguintes chaves: $15, 17, 23, 26, 34, 52, 74, 88$. Supondo que T seja implementada utilizando o método de encadeamento exterior, responda as seguintes questões:

   (a) (1,0) Determine um número $k > 1$ tal que a função de espalhamento $h(x) = x \mod k$ gere o menor número possível de colisões. Quantas colisões são geradas com esta escolha?

   Resposta: Como temos 5 posições na tabela e 8 elementos a serem inseridos, o melhor caso ocorre quando alocamos ao menos um elemento e no máximo dois em cada posição da tabela. Isso ocorre para $k = 5$, gerando assim três colisões.

   (b) (1,0) Determine um número $k' > 1$ tal que a função de espalhamento $h'(x) = x \mod k'$ gere o maior número possível de colisões. Quantas colisões são geradas com esta escolha?

   Resposta: Quanto menor o intervalo de elementos possíveis a serem alocados, maior será o número de colisões. Portanto podemos ver que para $k' = 2$ teremos um total de 6 colisões, uma vez que teremos apenas duas possibilidades, números pares e ímpares, e existem um elemento em cada.

5. (2,0) Determine 7 frequências $f_1, f_2, \ldots, f_7$, de modo que a árvore de Huffman para estas frequências tenha a maior altura possível. Justifique sua resposta.

   Resposta: Para obter uma árvore de Huffman de altura máxima devemos fazer com que cada frequência seja uma folha da árvore e que cada nó interno possua ao menos uma folha como subárvore. Para isso, basta que $f_i \geq f_{i-1} + f_{i-2}$, para todo $i \geq 2$. Um exemplo pode ser dado pelas frequências: $1, 1, 2, 4, 8, 16, 32$. Podemos ver que a árvore gerará um novo nó interno com folhas cujas frequências possuem ambas valores iguais a 1 e portanto de valor igual a 2. Assim obtemos uma nova lista de frequências a serem estruturadas em uma árvore de Huffman com valores: $2, 2, 4, 8, 16, 32$. Podemos aplicar novamente o mesmo argumento com as frequências de valor 2, obtendo assim um nó interno de valor 4 e assim sucessivamente.